DÙNG CHỮ SỐ TẬN CÙNG VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN "KHÔNG TỒN TẠI CÁC SỐ NGUYÊN THOẢ MÃN CÁC ĐẲNG THỨC NÀO ĐÓ"

Tạp chí THPT số 28
7-1999

Nguyễn Ngọc Thạch
Phòng Giáo dục CưJút- Đắc Lắc

Ta thường hay gặp những bài toán chứng minh rằng: Không tồn tại các số nguyên thoả mãn các đẳng thức nào đó. Đối với học sinh đây là một dạng toán khó, nhiều học sinh không biết phương pháp giải loại toán này. Để giúp học sinh giải dễ dàng loại toán này chúng tôi xin nêu phương pháp *dùng chữ số tận cùng* và *chứng minh phản chứng* để giải dạng toán này một cách dễ dàng.

Sau đây ta xét một số bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng, không tồn tại các số nguyên a, b, c thoả mãn các đẳng thức sau:

$abc + a = 3333$ (1)

$abc + b = 5555$ (2)

$abc + c = 7777$ (3)

Giải: Ta dùng phương pháp chứng minh phản chứng.

Giả sử tồn tại các số nguyên a,b,c thoả mãn các đẳng thức (1) ; (2) ; (3).

Từ (1) ta suy ra: $a(bc+1) = 3333$ (4)

Ta trừ các đẳng thức đã cho vế với vế ta có:

(2) - (1) $\Rightarrow b - a = 2222$ (5)

(3) - (2) $\Rightarrow c - b = 2222$ (6)

vì vế phải của đẳng thức (5) và (6) là số chẵn nên ta suy ra:

Hoặc : a, b, c đều là số chẵn.

Hoặc : a, b, c đều là số lẻ.

Bây giờ ta xét hai trường hợp trên:

* Nếu a,b,c đều là số chẵn, điều này mâu thuẫn với đẳng thức (4), vì vế phải của (4) là một số lẻ.

* Nếu a, b, c đều là số lẻ thì ta có bc là số lẻ nên (bc+1) là số chẵn, suy ra a(bc+1) là số chẵn, điều này mâu thuẫn với đẳng thức (4), vì vế phải của (4) là một số lẻ.

Vậy: không tồn tại các số nguyên a,b,c thoả mãn các đẳng thức (1) , (2) , (3).

Bài 2: Chứng minh rằng, không tồn tại các số nguyên a,b,c,d thoả mãn các đẳng thức sau:

$abcd - a = \underbrace{11\ldots1}_{1980}$ (1) (1980 chữ số 1)

$abcd - b = \underbrace{11\ldots1}_{1981}$ (2) (1981 chữ số 1)

$abcd - c = \underbrace{11\ldots1}_{1982}$ (3) (1982 chữ số 1)

$abcd - d = \underbrace{11\ldots1}_{1983}$ (4) (1983 chữ số 1)

Giải: Ta dùng phương pháp chứng minh phản chứng. Giả sử tồn tại các số nguyên a,b,c,d thoả mãn các đẳng thức (1), (2), (3), (4). Ta trừ các đẳng thức trên vế với vế như sau:

(2)-(1)$\Rightarrow$a-b=$\underbrace{10........0}_{1980}$(5)(1980 chữ số0)

(4) - (3) $\Rightarrow$ c - d = $\underbrace{10....0}_{1982}$ (6) (1982 chữ số 0)

(3)-(1) $\Rightarrow$ a - c =$\underbrace{110.....0}_{1980}$ (7) (1980 chữ số 0)

Từ (5) suy ra a và b có chữ số tận cùng bằng nhau.

Từ (6) suy ra c và d có chữ số tận cùng bằng nhau.

Từ (7) suy ra a và c có chữ số tận cùng bằng nhau.

Do đó ta suy ra: a,b,c,d có chữ số tận cùng bằng nhau.

Gọi chữ số tận cùng của a,b,c,d là x ($0 \le x \le 9$)

Thì abcd - a = a(bcd - 1) có chữ số tận cùng là (ta xét các trường hợp của x)

x=0 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 0

x=1 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 0

x=2 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 4

x=3 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 8

x=4 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 2

x=5 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 0

x=6 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 0

x=7 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 4

x=8 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 8

x=9 thì a(bcd-1)có chữ số tận cùng bằng 2

Như vậy a(bcd - 1) = abcd - a không có chữ số tận cùng bằng 1 mà số 11....1 lại có chữ số tận cùng bằng 1, điều này mâu thuẫn với đẳng thức (1).

Tương tự như vậy ta chứng minh được đẳng thức (2), (3) , (4) cũng mâu thuẫn. Vậy các đẳng thức (1) , (2) , (3) , (4) không xảy ra tức là không tồn tại các số nguyên a,b,c,d thoả mãn các đẳng thức (1) , (2) , (3), (4).

Bài 3: Chứng minh rằng, không tồn tại các số nguyên a,b,c thoả mãn các đẳng thức sau:

$abc + a = 1995^n$ (1)

$abc + b = 1997^n$ (2)

$abc + c = 1999^n$ (3) $n \in N$

Giải: Ta dùng phương pháp chứng minh phản ứng.

Giả sử tồn tại các số nguyên a,b,c thoả mãn các đẳng thức (1) , (2) , (3).

Từ (1) $\Rightarrow$ $a(bc + 1) = 1995^n$ (4)

Ta trừ các đẳng thức (1) , (2) , (3) vế với vế ta được:

(2) - (1) $\Rightarrow$ $b - a = 1997^n - 1995^n$ (5)

(3) - (2) $\Rightarrow$ $c - b = 1999^n - 1997^n$ (6)

Ta thấy 1995^n, 1997^n , 1999^n là các số lẻ nên vế phải của (5) và (6) là số chẵn.

Do đó suy ra: Hoặc a,b,c đều là số chẵn. Hoặc a,b,c đều là số lẻ.

Bây giờ ta xét các trường hợp sau:

* Nếu a, b, c đều chẵn thì ta có a(bc + 1) là số chẵn, điều này mâu thuẫn với đẳng thức (4) vì vế phải của (4) là một số lẻ.
* Nếu a,b,c đều lẻ thì ta có bc là số lẻ $\Rightarrow$ bc-+1 là số chẵn $\Rightarrow$ a(bc +1) là số chẵn, điều này mâu thuẫn với đẳng thức (4) vì vế phải của (4) là một số lẻ.

Vậy không tồn tại các số nguyên a,b,c thoả mãn các đẳng thức (1), (2) , (3).

Bài 4: Chứng minh rằng, không tồn tại các số nguyên a,b,c,d thoả mãn các đẳng thức sau:

$abcd - a = 1995^{1996}$ (1)

$abcd - b = 1995-^{1997}$ (2)

$abcd - c = 1995^{1998}$ (3)

$abcd - d = 1995^{1999}$ (4)

Giải: Ta dùng phương pháp chứng minh phản chứng:

Giả sử tồn tại các số nguyên a,b,c,d thoả mãn các đẳng thức (1), (2), (3) , (4).

Ta trừ các đẳng thức vế với vế như sau: (2) - (1) $\Rightarrow a-b = 1995^{1997} - 1995^{1996}$ $=1995^{1996}(1995 - 1) =1995^{1996}. 1994$ (5)

(4) - (3) $\Rightarrow c - d=1995^{1999} - 1995^{1998} =$ $= 1995^{1998}(1995 -1) = 1995^{1998}. 1994$ (6)

(3) - (1) $\Rightarrow a - c = 1995^{1998} - 1995^{1996} =$ $= 1995^{1996}(1995^2 - 1)$ (7)

Ta thấy vế phải của (5), (6), (7) có chữ số tận cùng bằng O nên suy ra a,b,c,d có chữ số tận cùng bằng nhau.

Gọi chữ số tận cùng của a,b,c,d là x $(0\leq x \leq 9)$

thì $abcd - a = a(bcd - 1)$ chỉ có thể có chữ số tận cùng là 0,2,4,8.

Như vậy $a(bcd-1) = abc-a$ không có chữ số tận cùng bằng 5 mà 1995^{1996} có chữ số tận cùng bằng 5, điều này mâu thuẫn với đẳng thức (1).

Tương tự như vậy ta chứng minh được đẳng thức (2), (3), (4) cũng mâu thuẫn.

Vậy các đẳng thức (1), (2), (3), (4) không xảy ra. Tức là không tồn tại các số nguyên a,b,c,d thoả mãn các đẳng thức (1), (2) , (3), (4).

Từ cách giải 4 bài toán trên ta thấy rằng: Sở dĩ ta giải được bài 1 và bài 3 bằng phương pháp như trên là nhờ vế phải của các đẳng thức (1), (2), (3) là số lẻ (còn vế trái của các đẳng thức có cấu tạo dạng như bài 1 và bài 3). Dựa vào nhận xét này ta có thể sáng tạo ra nhiều bài toán mới như dạng bài 1 và bài 3. Cụ thể như sau (có thể hơn 3 trường hợp của vế phải.

Vế trái	Vế phải có thể là		
	Trường hợp 1	Trường hợp 2	Trường hợp 3
abc - a	1995^n+1996^m	5^{1997}	11......1
abc - b	1996^n+1997^m	5^{1998}	33......3
abc - c	1997^n+1998^m	5^{1999}	55......5

Sở dĩ ta giải được bài 2 và bài 4 bằng phương pháp như trên là nhờ vế bên phải của các đẳng thức (1), (2), (3), (4) là các số lẻ và có chữ số tận cùng giống nhau (còn vế trái của đẳng thức có dạng như bài 2 và bài 4). Bằng cách lập bảng như trên ta có thể sáng tạo ra nhiều bài toán dạng như bài 2 và bài 4 (bạn đọc có thể tự lập bảng để sáng tạo ra các bài toán mới).

Qua cách giải dùng chữ số tận cùng và phương pháp chứng minh phản chứng để giải các bài toán dạng như trên, ngoài việc cung cấp phương pháp giải bài toán chúng tôi cũng đã gián tiếp hình thành năng lực sáng tạo các bài toán mới cho học sinh.❐